Отзыв
официального оппонента на диссертационную работу
Кулешова Павла Александровича на тему «Оценки собственных значений краевых задач на стратифицированных множествах», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Диссертационная работа Кулешова П.А. посвящена оценке первого собственного значения оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле на стратифицированных множествах размерности 1 и 2, а также обобщению неравенств Пуанкаре и Соболева для функций, заданных на стратифицированных множествах конечной размерности.

В соответствии с пунктом 23 Положения о порядке присуждения ученых степеней, утвержденного постановлением № 842 Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 года, на основе изучения диссертации и опубликованных научных работ по теме диссертации, можно дать следующие оценки.

1. **Актуальность темы**. В диссертации затрагиваются следующие проблемы:

а) формализация и обобщение краевых задач типа Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа на стратифицированных множествах;

б) применение и обобщение принципа симметризации Шварца и принципа Пойя-Сеге на стратифицированных множествах;

в) оценка снизу первого собственного значения оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле на стратифицированных множествах размерности 1 и 2;

г) обобщение неравенств Пуанкаре и Соболева для функций заданных на стратифицированных множествах.

Эти проблемы актуальны в современной теории дифференциальных уравнений и находят применения в теоретических и прикладных вопросах. Математический аппарат, применяемый в диссертации, является сравнительно новым в теории дифференциальных уравнений. Этот аппарат позволяет исследовать широкий круг задач для дифференциальных уравнений на множествах, имеющих сложную структуру.

2. **Степень обоснованности научных положений, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации**. Оценки снизу первого собственного значения оператора Лапласа с краевыми условиями Дирихле на стратифицированных множествах размерности 1 и 2 приведены и обоснованы по следующей схеме:

1) формулировка задачи для жесткого и мягкого лапласиана;

2) доказательство вариационного равенства для первого собственного значения (принцип Рэлея);

3) доказательство свойств гладкости и сохранения интеграла от квадрата функции при симметризации на стратифицированных множествах;

4) доказательство теоремы о невозрастании интеграла Дирихле при симметризации функций на стратифицированных множествах (обобщение принципа Пойя-Сеге);

5) применение изопериметрических неравенств для доказательства обобщенного принципа Пойя-Сеге на стратифицированных множествах размерности больше 1.

Доказанные оценки еще раз подтверждают гипотезу Рэлея о том, что первое собственное значение оператора Лапласа (основная частота колебаний) минимально на таких симметрических множествах как отрезок, круг и шар.

Математический аппарат, с помощью которого оценивается первое собственное значение оператора Лапласа, применяется для доказательства неравенств Пуанкаре и Соболева на стратифицированных множествах.

3. **Достоверность и новизна полученных результатов**. Полученные результаты являются новыми и обобщают классические работы Рэлея, Г. Фабера, Е. Крана, Г. Пойя, Г. Сеге на случай стратифицированных множеств. Результаты диссертации можно считать продолжением научных изысканий воронежской математической школы по дифференциальным уравнениям на стратифицированных множествах.

Отметим новизну полученных результатов.

В первой главе доказаны теоремы 1.2.1, 1.3.1, 1.4.1, 1.5.1. В теореме 1.2.1 утверждается, что для любой неотрицательной функции $u \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ на связном графе $\Gamma = \Gamma_0 \cup \partial\Gamma_0$ с внутренностью Γ_0 и границей $\partial\Gamma_0$ имеет место неравенство (обобщенный принцип Пойя-Сеге)

$$\int_\Gamma (u')^2 d\mu \ge \int_0^L ((u^*)')^2 dx, \tag{1.2.10}$$

где u^* - симметризация функции u на отрезке $[0, L]$ длины L, а L равно сумме длин ребер графа Γ - $L = \mu(\Gamma)$. При этом предполагается, что любое ребро графа Γ лежит на каком-нибудь простом пути с концами, лежащими на границе $\partial\Gamma_0$.

В теореме 1.3.1 установлено вариационное равенство (принцип Рэлея)

$$\lambda_0 = \min\left\{ \frac{\int_\Gamma (u')^2 d\mu}{\int_\Gamma (u)^2 d\mu} : \quad u \in PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0), \quad u \ne 0 \right\}$$

для первого собственного значения λ_0 краевой задачи Штурма-Лиувилля

$$\Delta u + \lambda \rho u = 0, \quad x \in \Gamma_0, \tag{1.1.2}$$

$$u|_{\partial\Gamma_0} = 0, \tag{1.1.3}$$

в том случае, когда $\rho \equiv 1$ на ребрах графа и $\rho = 0$ на вершинах графа (случай мягкого лапласиана). Здесь $PC_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ - множество функций, непрерывных на Γ, кусочно-гладких на Γ_0 и обращающихся в нуль на границе $\partial\Gamma_0$.

В теореме 1.4.1 доказано, что в условиях теоремы 1.2.1 для первого собственного значения λ_0 имеет место оценка

$$\lambda_0 \ge \frac{\pi^2}{(\mu(\Gamma))^2}. \tag{1.4.1}$$

Из неравенства (1.4.1) вытекает, что значение λ_0 минимально, если Γ - отрезок (гипотеза Рэлея для графов).

В теореме 1.5.1 доказано, что если граф Γ удовлетворяет условию теоремы 1.2.1 и функция $\rho \in C_0^1(\Gamma_0, \partial\Gamma_0)$ неотрицательна, то для первого собственного значения λ_0 верна оценка

$$\lambda_0 \geq \frac{\pi^2}{\rho_0\big(\mu(\Gamma) + K_v\big)^2}, \qquad (1.5.3)$$

где ρ_0 - максимум функции ρ на Γ, K_v - количество вершин, входящих в Γ_0.

Во второй главе исследована проблема оценки первого собственного значения λ_0 краевой задачи

$$\Delta_p u + \lambda \rho u = 0, \quad x \in \Omega_0, \qquad (2.2.1)$$

$$u\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \qquad (2.2.2)$$

на стратифицированном множестве $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ размерности 2. Здесь $\Delta_p u$ - p - лапласиан, который в диссертации определено формулой (2.1.2). Выделены два случая: 1) случай жесткого лапласиана, когда функция p тождественно равна 1 на Ω_0; 2) случай мягкого лапласиана, когда функция p тождественно равна 1 только на свободных стратах Ω_0 и равна нулю на оставшейся части Ω_0. Исследуя краевую задачу (2.2.1)-(2.2.2), сформулированы и доказаны теоремы 2.2.1 (принцип Релея), 2.3.1 (изопериметрическое неравенство), 2.4.1 (принцип Пойя-Сеге), 2.4.2 (оценка первого собственного значения).

В третьей главе доказана теорема 3.3.1, обобщающая неравенство Пуанкаре для функций, заданных на стратифицированных множествах произвольной размерности. Согласно этой теореме, для любой функции $u \in W_0^{1,p}(\Omega_0, \partial\Omega_0)$, заданной на прочном стратифицированном множестве $\Omega = \Omega_0 \cup \partial\Omega_0$ произвольной размерности, при $p \geq 2$ имеет место неравенство

$$\int_{\Omega_0} |u|^p \, d\mu \quad \leq \quad C \int_{\Omega_0} |\nabla u|^p \, d\mu, \qquad (3.1.2)$$

где положительное число C не зависит от функции u.

Далее, в третьей главе, совершенствуя технику изопериметрических неравенств, доказаны теоремы 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5, обобщающие неравенство Соболева для функций, заданных на стратифицированных множествах.

По содержанию глав диссертации можно сделать ряд замечаний.

1. Симметризация функции по Шварцу не является общеизвестным понятием. На 30-й странице диссертации приводится определение симметризации функции и отмечается ее единственность без ссылки на какую-либо литературу.

2. Теорему 1.3.1 (принцип Рэлея) можно было сформулировать и доказать до теоремы 1.2.1. Доказательство принципа Рэлея не связано с симметризацией Шварца.

3. На 57-й странице «число примыканий» определяется интуитивно.

4. На 60-й странице дивергенция касательного векторного поля определяется формулой (2.1.1). Почему так определяется дивергенция, не объясняется.

5. Слова « … рассматриваемый как риманово многообразие с метрикой, индуцированной его вложением в R^n », приведенные на 60-й странице, требуют расшифровки.

6. Во второй и третьей главах диссертации некоторые понятия вводятся интуитивно, а доказательства некоторых утверждений схематичны. Об их

корректности и достоверности что-либо высказать весьма затруднительно. Во избежание сомнений по этому поводу, следовало бы привести определения и доказательства на конкретных множествах. На мой взгляд, соискателю ученой степени кандидата наук по математике гораздо полезнее иметь дело с конкретными объектами, нежели увлекаться обобщенными и схематичными рассуждениями.

4. **Заключение о соответствии диссертации критериям, установленным в пунктах 9-14 Положения о порядке присуждения ученых степеней**.

Представленную диссертацию можно считать научно-квалифицированной работой, где получены новые результаты, имеющие значение в теории дифференциальных уравнений.

В диссертации применяются и развиваются идеи и методы воронежской математической школы по исследованию дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах.

В диссертации решены актуальные проблемы современной теории дифференциальных уравнений, в частности, получены нетривиальные оценки первого собственного значения оператора Лапласа на стратифицированных множествах, доказывая и используя изопериметрические неравенства. Полученные в диссертации результаты обобщают классические работы Рэлея, Пойя-Сеге и значительно дополняют известные работы по неравенствам Пуанкаре и Соболева на стратифицированных множествах.

Основные научные результаты диссертации опубликованы в трех рецензируемых научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве образования и науки Российской Федерации.

Необходимые ссылки на авторов и источники заимствования материалов в диссертации имеется. В соавторстве выполненные научные работы в диссертации и в автореферате отмечены.

Диссертация соответствует всем критериям Положения о порядке присуждения ученых степеней, а ее автор - Кулешов П.А. заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 - Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление.

Официальный оппонент:
Наимов Алижон Набиджанович, доктор физико-математических наук по специальности 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, профессор кафедры информационных систем и технологий Вологодского государственного университета

5 ноября 2015 года А. Н. Наимов

Подпись заверяю
Менеджер по персоналу отдела кадров Управления делами

Контактная информация:
Вологодский государственный университет,
160000, Россия, г. Вологда, улица Ленина, 15.
сайт: www.vstu.edu.ru
телефон: +79211202273
e-mail: nan67@rambler.ru